Über geschlossene Streckenzüge mit Normalrissen von verschwindendem Flächeninhalt I

Müller, Hans Robert

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 45, 1994, S.35-38

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Über geschlossene Streckenzüge mit Normalrissen von verschwindendem Flächeninhalt I

Von **Hans Robert Müller***, Wolfenbüttel

(Eingegangen am 14.10.1994)

In [1] und [2] wurden geschlossene Raumkurven des dreidimensionalen euklidischen Raumes betrachtet, deren Parallelprojektionen in beliebiger Richtung n zu verschwindendem orientierten Flächeninhalt der Bildkurven in einer Ebene ε führen. In Analogie hierzu werden entsprechende Überlegungen für *geschlossene räumliche Streckenzüge* (Polygone mit N Eckpunkten) angestellt. Bei Bezug auf ein normiertes rechtwinkeliges Dreibein $(O; e_1, e_2, e_3)$ werden die Eckpunkte P_i durch die Vektoren $\overrightarrow{O\,P_i} = x_i$, $(i = 1, 2, \ldots N)$ erfaßt. Die Geschlossenheit des Streckenzuges $\{P_i\}$ kommt durch

$$\sum_{i=1}^{N} x_{i+1} - x_i = 0 \tag{1}$$

zum Ausdruck.

Wir können uns auf Normalprojektionen $(n \perp \varepsilon)$ beschränken, da alle ebenen Schnitte des Projektionsprismas durch ein Polygon affin zu einander sind. Alle unsere Aussagen über Normalrisse gelten in der Folge auch für parallele Strahlen, die gegen ε beliebig geneigt sind.

Wir lassen die Ebene ε durch den Ursprung O gehen und wählen $n = e_3$. Der Normalriß P_i^n von P_i wird dann durch

$$x_i^n = x_i - (n\, x_i)\, n \tag{2}$$

erfaßt.

Der *Flächenvektor* f_i^n des Dreiecks O, P_i^n, P_{i+1}^n errechnet sich als Vektorprodukt

$$2\, f_i^n = x_i^n \times x_{i+1}^n. \tag{3}$$

Der zugehörige *skalare Flächeninhalt* F_i^n dieses Dreiecks ist

$$2\, F_i^n = 2\, n\, f_i^n = n\, (x_i^n \times x_{i+1}^n)$$

und wegen (2)

$$2\, F_i^n = n\, (x_i \times x_{i+1}). \tag{4}$$

Der Normalriß $\{P_i^n\}$ des betrachteten Streckenzuges $\{P_i\}$ ist wieder ein geschlossenes Polygon, dessen *orientierter Flächeninhalt* F^n durch

$$2\, F^n = n \sum_{i=1}^{N} x_i \times x_{i+1} = n\, v \tag{5}$$

* Prof. em. Dr. H. R. Müller · Am Schiefen Berg 49 · 38302 Wolfenbüttel

geliefert wird. Da n ein fester Einheitsvektor ist, muß für einen *Streckenzug* $\{P_i\}$ mit *verschwindendem Projektionsinhalt*

$$v = \sum_{i=1}^{N} v_i = \sum_{i=1} x_i \times x_{i+1} = 0 \tag{6}$$

gelten.

Eine *bildliche Darstellung* und damit räumliche Vorstellung von geschlossenen Streckenzügen mit der Eigenschaft, in jeder Projektionsrichtung n zu verschwindenden, orientierten Projektionsinhalten zu führen, kann etwa in der Ebene ε als Grundrißebene erfolgen, wobei die Höhen über ε als Koten der Punkte P_i angegeben werden. (Kotierte Projektion)

Wir wollen noch annehmen, daß keine vier Punkte P_i, P_{i+1}; P_j, P_{j+1} in einer Ebene liegen. Hiermit werden Schnittpunkte zweier Strecken des Streckenzuges ausgeschlossen.

Von Interesse sind in der Projektion auf ε die *scheinbaren Doppelpunkte* S^n von $\{P_i^n\}$, die als Schnitt von Strecken $P_i^n P_{i+1}^n$ und $P_j^n P_{j+1}^n$ auftreten. Die Koten der Punkte S_i bzw. S_j (mit dem gemeinsamen Bildpunkt S^n) über der Ebene ε sind für die Sichtbarkeit ausschlaggebend, d.h. für die Entscheidung, welche der beiden Strecken P_i, P_{i+1}; P_j, P_{j+1} an der Stelle S^n über der anderen liegt.

Hierzu sucht man die Gleichungen der Geraden $P_i^n P_{i+1}^n$ und $P_j^n P_{j+1}^n$ im Koordinatensystem (O, e_1, e_2) der Ebene ε. Als gemeinsame Lösung findet man die Koordinaten des Schnittpunktes S^n (s_1, s_2). In einer Parameterdarstellung der Raumgeraden P_i P_{i+1}, d.h. in

$$z_i = x_i + \lambda\,(x_{i+1} - x_i)$$

wird nun λ so bestimmt, daß S^n der Geraden angehört, d.h.

$$s_k = x_{ik} + \lambda\,(x_{i+1\,k} - x_{i\,k})$$

für k = 1,2 gilt. – Mit diesem Wert λ wird nun

$$s_{i\,3} = x_{i\,3} + \lambda\,(x_{i+1 3} - x_{i\,3})$$

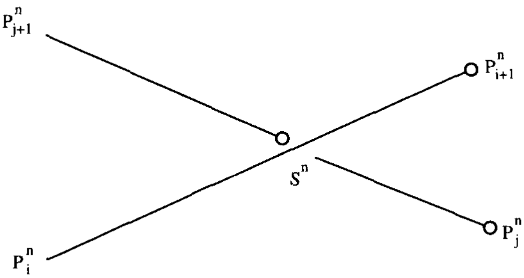
als Kote von $S = S_i$ auf P_i P_{i+1} gefunden.

Die gleiche Überlegung wird nun für P_j P_{j+1} angestellt, um die Höhe von S_j über S_n zu ermitteln. Der Vergleich der Koten $s_{i\,3}$ und $s_{j\,3}$ zeigt, daß im Falle $s_{i\,3} > s_{j\,3}$ die Strecke P_i P_{i+1} über P_j P_{j+1} liegt. (Der Beobachter blickt hierbei von „oben" auf die Grundrißebene ε.)

Der Fall $s_{i\,3} = s_{j\,3}$ wird durch die Forderung, daß die vier Punkte P_i, P_{i+1}; P_j, P_{j+1} nicht komplanar sind, ausgeschlossen. In der kotierten Projektion des Streckenzuges sind damit die Sichtbarkeitsverhältnisse geklärt (siehe Abb. auf S. 37).

Ein allgemeines Verfahren zur Ermittlung von Streckenzügen im Raum mit der gewünschten Projektionseigenschaft kann in folgender Weise versucht werden:

Für die Konstruktion eines N-Ecks wählt man im Raum willkürlich N-1 Punkte P_1, P_2, … P_{N-1} und versucht, durch geeignete Wahl des N-ten Punktes P_N die kennzeich-



Scheinbarer Doppelpunkt S^n
Strecke $P_i\,P_{i+1}$ *über* Strecke $P_j\,P_{j+1}$

nende Bedingung (6) zu erfüllen. Wenn wir $P_1, P_2 \ldots P_{N-1}$ als gegeben voraussetzen, so bedeutet dies keine Einschränkung der Allgemeinheit, denn durch eine Bezeichnungsänderung in der Reihenfolge des Streckenzuges läßt sich dies stets erreichen. Mit

$$\sum_{i=1}^{N-2} x_i \times x_{i+1} = w \tag{7}$$

trachtet man nun x_N so zu bestimmen, daß

$$(x_{N-1} - x_1) \times x_N + w = 0 \tag{8}$$

wird. Dies stellt eine Vektorgleichung dar, die einem linearen inhomogenen System von drei Gleichungen für $x_{N\,k}$ ($k = 1, 2, 3$) entspricht, wobei allgemein die Zerlegung eines Vektors x_i in

$$x_i = \sum_{k=1}^{3} x_{i\,k}\, e_k$$

benützt wurde. Statt (8) erhalten wir

$$\begin{aligned}
& & x_{N2}\,(x_{13} - x_{N-13}) &+ x_{N3}\,(x_{N-12} - x_{12}) + w_1 = 0\\
x_{N1}\,(x_{N-13} - x_{13}) &+ & &+ x_{N3}\,(x_{11} - x_{N-11}) + w_2 = 0\\
x_{N1}\,(x_{12} - x_{N-12}) &+ & x_{N2}\,(x_{N-11} - x_{11}) &+ w_3 = 0
\end{aligned}$$

Die Koeffizientendeterminante dieses Gleichungssystems ist schief-symmetrisch und daher gleich Null. Besitzt nun die erweiterte Matrix des inhomogenen Systems gleichfalls den Rang 2, so können die Punkte $P_1, P_2, \ldots P_{N-1}$ zu den Eckpunkten eines N-Ecks mit verschwindendem Projektionsinhalt erweitert werden. Im Falle der Lösbarkeit liegen die ∞^1 Lösungspunkte P_N auf einer Geraden des Raumes.

Hat die erweiterte Matrix jedoch den Rang 3, so existieren keine Lösungen von (8).

Zu einer mechanischen Deutung unserer Fragestellung gelangen wir durch die Annahme, daß die Punkte P_i ($i = 1, 2, \ldots N$) einem starren Körper angehören und in ihnen Kräfte $\delta x_i = x_{i+1} - x_i$ angreifen. Wegen (1) ist die Vektorsumme aller äußeren Kräfte Null und verschwindet wegen (6) die Vektorsumme der Drehmomente. Es sind somit die Gleichgewichtsbedingungen der Statik erfüllt. Der Streckenzug $\{x_i\}$ ist daher im *statischen Gleichgewicht.*

Literaturverzeichnis

[1] Müller, H. R.: Geschlossene Raumkurven mit Normalrissen von verschwindendem Flächeninhalt. Abhandl. d. Braunschw. Wiss. Ges. Bd. 34 (1982), 39–45.

[2] Müller, H. R.: Über geschlossene Raumkurven mit der Parameterdarstellung x(t), für die $\oint x \times dx = 0$ gilt. Im Druck!